SYMMETRY

# OBRASCI ELEMENTARNE MATEMATIKE

SY347 • 9. jun 2008.

**Prirodni brojevi** su skup svih pozitivnih celih brojeva, $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

**Celi brojevi** su skup svih pozitivnih i negativnih celih brojeva i nule, $Z = \{... -1, -2, -3, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

**Racionalni brojevi** su skup svih brojeva koji se mogu izraziti u obliku razlomka $p/q$, celih brojeva p i q, pri čemu je q različito od nule. Ovom skupu pripadaju svi celi brojevi i svi pozitivni i negativni razlomci. Svaki racionalan broj može da se izrazi kao decimalan broj sa konačno mnogo cifara, ili decimalan broj sa beskonačno mnogo decimala koje su nizovi cifara koji se ponavljaju (npr. $47{,}692\,692\,692\,...$).

**Iracionalni brojevi** su skup svih brojeva koji se ne mogu izraziti u obliku razlomka $p/q$ celih brojeva p i q. Svaki iracionalan broj može da se izrazi kao decimalan broj sa beskonačno mnogo decimala koje nisu nizovi cifara koji se ponavljaju. Neki od iracionalnih brojeva su: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi$, $e$, $\ln 2$, $\log 3$.

**Realni brojevi** su skup svih racionalnih i svih iracionalnih brojeva. Realnim brojevima pripadaju i vrednosti $+\infty$ i $-\infty$.

U određenim slučajevima rezultat zavisi od redosleda obavljana operacija. Tada se koriste zagrade kako bi se označile operacije koje treba obaviti prve.

Realan broj napisan kao a, može da sadrži minus. Tako npr. ako je $a = -5$, izraz $-a$ znači $-(-5)$.

Pri označavanju množenja, znak $\cdot$ se izostavlja ako ne postoji mogućnost da dođe do nejasnoća.

Radi skraćivanja se koriste sledeća dole data zapisivanja.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

U narednom tekstu su data neka od pravila po kojima se izvode operacije sa:

- prirodnim brojevima m, n
- celim brojevima p, q
- realnim brojevima a, b, c, d, e, f
- nenegativnim realnim brojevima g, h ($g \geq 0$, $h \geq 0$)
- brojevima većim od nule s, t, u ($s > 0$, $t > 0$, $u > 0$).

## 1. Sabiranje i oduzimanje

a) $a + 0 = 0 + a = a$ (neutralni element)

b) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (suprotni element)

c) $a + b = b + a$ (komutativnost)

d) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asocijativnost)

e) $a + (b - c) = a + b - c$

f) $a - 0 = a$

g) $0 - a = -a$

h) $a - (b + c) = a - b - c$

i) $a - (b - c) = a - b + c$

j) $+(+a) = +a = a$
$-(-a) = +a = a$
$-(+a) = -a$
$+(-a) = -a$

## 2. Množenje

a) $n \cdot a = na = a + a + \ldots + a$, n sabiraka

b) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (neutralni element)

c) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (suprotni element)

d) $a \cdot 0 = 0$

e) $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativnost)

f) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asocijativnost)

g) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivnost)
$a \cdot (b - c + d) = a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d$
$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

h) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = (b \cdot c) \cdot a$

i) $(+a) \cdot (+b) = +(ab)$
$(+a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$

j) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ i $0! = 1$ (n! čitati "faktorijel n")

## 3. Deljenje

a) $a : b = \frac{a}{b} = a/b$, za $b \neq 0$

b) $a : 1 = a$ (neutralni element)

c) $a : a = 1$

d) $0 : a = 0$

e) $a : 0$ nema aritmetičkog smisla

f) $(+a) : (+b) = +(a : b)$, za $b \neq 0$

$(-a) : (-b) = (a : b)$

$(+a) : (-b) = (-a) : (+b) = -(a : b)$

g) $(a + b - c) : d = (a : d) + (b : d) - (c : d)$, za $d \neq 0$

h) $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, za $b \neq 0$ i $c \neq 0$

$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

i) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$, za $c \neq 0$

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$

j) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$, za $b \neq 0$ i $d \neq 0$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

k) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, za $b \neq 0$ i $d \neq 0$

l) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, za $b \neq 0$ i $c \neq 0$ i $d \neq 0$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

m) $a : b = c : d$ ekvivalentno $a \cdot d = b \cdot c$ (proporcija)

## 4. Računske operacije sa nulom

a) $a + 0 = a$

b) $a - 0 = a$

c) $a \cdot 0 = 0$

d) $0 : a = 0$

e) Operacija deljenja sa nulom nema aritmetičkog smisla, npr. $a : 0$ ne postoji. U slučaju da delitelj nije nula nego se neograničeno približava nuli, količnik teži beskonačno.

f) $0 : 0$ je neodređeno, jer za bilo koje $x$ važi $x \cdot 0 = 0$.

## 5. Računske operacije sa beskonačno

a) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

b) $(-\infty) - (-\infty) = -\infty$

c) $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

d) $\frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{za } a > 0 \\ -\infty & \text{za } a < 0 \end{cases}$

## 6. Stepenovanje

a) $b^1 = b;\ b^2 = b \cdot b;\ b^3 = b \cdot b \cdot b;\ \ldots$
Zapis $b^2$ čitati "b na kvadrat", $b^3$ čitati "b na treći"... Ovde se za b kaže da je osnova, a za 2 i 3 da su izložioci. Primeri: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$; $12{,}3^2 = 151{,}29$; $0{,}4^2 = 0{,}16$; $0{,}4^3 = 0{,}064$; $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$; $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$.

b) $b^0 = 1$ za $b \neq 0$

c) $1^n = 1$
$0^n = 0$

d) $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

e) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

f) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

g) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

h) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

i) $(\frac{a}{b})^c = \frac{a^c}{b^c}$

j) $a^{\frac{b}{c}} = (a^{\frac{1}{c}})^b = (a^b)^{\frac{1}{c}}$

k) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (razlika kvadrata)

l) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (kvadrat binoma)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

## 7. Korenovanje

a) Ako je $g = h^2$, onda je $h = \sqrt{g}$. Zapis $\sqrt{g}$ čitati "kvadratni koren g", ili "koren g".

Ako je $g = h^m$, onda je $h = \sqrt[m]{g}$. Zapis $\sqrt[m]{g}$ čitati "m-ti koren g".

Zapis $\sqrt[3]{g}$ čitati "kubni koren g".

Ovde se za g kaže da je potkorena veličina, a za 2 (koje se podrazumeva) i za 3 da su izložioci korena. Primeri: $\sqrt{16} = 4$ i $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$, nalaženjem kvadratnog korena dobijamo broj koji kada se digne na kvadrat daje potkorenu veličinu. $\sqrt[3]{27} = 3$ i $3^3 = 27$.

b) $\sqrt[m]{g} = g^{\frac{1}{m}}$

c) $\sqrt[m]{g^m} = g$

$(\sqrt[m]{g})^m = g$

d) $(\sqrt[m]{g})^n = (\sqrt[m]{g^n})$

e) $\sqrt[m]{g^n} = g^{\frac{n}{m}}$

f) $\sqrt[m]{g} \cdot \sqrt[m]{h} = \sqrt[m]{g \cdot h}$

g) $\sqrt[m]{\frac{g}{h}} = \frac{\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{h}}$

h) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{g}} = \sqrt[mn]{g}$

## 8. Moduo broja

a) **Moduo** (ili **apsolutna vrednost**) broja b, označen kao $|b|$, je broj koji je jednak samom b ako je b pozitivan, ili nula, i $-b$ ako je b negativan:

$$|b| = \begin{cases} b & \text{za } b \geq 0 \\ -b & \text{za } b < 0 \end{cases}.$$

Primeri: $|5{,}1| = 5{,}1$; $|0| = 0$; $|-3{,}2| = -(-3{,}2) = 3{,}2$; $|-7| = -(-7) = 7$. Dakle, $|b|$ je uvek nenegativan broj (tj. pozitivan ili nula). $|b|$ odgovara dužini segmenta brojne ose između koordinatnog početka i tačke koja pretstavlja broj b.

Uvek je $|b| \geq 0$.

c) $|-b| = |b|$

d) $|a \cdot b \cdot \ldots \cdot d| = |a| \cdot |b| \cdot \ldots \cdot |d|$

e) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ za $b \neq 0$

f) $|a| = |b|$ samo ako je $a^2 = b^2$ ili $a = \pm b$

g) $|a| \leq |b|$ samo ako je $a^2 \leq b^2$ ili $-a \leq b \leq a$

h) $|a + b + \ldots + d| \leq |a| + |b| + \ldots + |d|$

i) $|a - b| \geq |a| - |b|$

j) $\operatorname{sgn} a = \frac{|a|}{a} = \begin{cases} 1 & \text{za } a > 0 \\ -1 & \text{za } a < 0 \end{cases}$ (sgn a čitati "signum a")

## 9. Logaritmovanje

a) Ako je $s^a = t$, onda je $\log_s t = a$, za $t > 0$, $s > 0$ i $s \neq 1$.

Zapis $\log_s t$ čitati "logaritam t za osnovu s". Logaritam nije definisan za $t \leq 0$. Logaritam nekog broja je broj kojim treba stepenovati osnovu logaritma da bi se dobio broj čiji smo logaritam tražili. Primeri: $\log_{10} 1000 = 100$, $10^{100} = 1000$; $\log_{10} 0{,}7 = -0{,}155$, $10^{-0{,}155} = 0{,}7$.

Dekadni logaritam je logaritam za osnovu 10. Označava se $\log t$.

Prirodni logaritam je logaritam za osnovu $e = 2{,}718\ldots$ Označava se $\ln t$.

b) $\log_s s = 1$

c) $\log_s 1 = 0$

d) $\log_s (t \cdot u) = \log_s t + \log_s u$

e) $\log_s \frac{t}{u} = \log_s t - \log_s u$

f) $\log_s \frac{t}{u} = -\log_s \frac{u}{t}$

g) $\log_s (t^a) = a \cdot \log_s t$

h) $\log_s t = \frac{1}{\log_t s}$

i) $\log_s t = \frac{\log_u t}{\log_u s}$

j) $t^{\log_s t} = s$

k) $s^{\log_s t} = t$

## 10. Linearne jednačine

a) **Linearna jednačina** po promenljivoj $x$ je svaka jednačina koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu opšteg oblika $a \cdot x = b$. Veličine $a$ i $b$ su realni brojevi.

Ekvivalentne transformacije jednačine su promene jednačine pri kojima jednačina ostaje da važi. Ekvivalentne transformacije se obavljaju množenjem ili deljenjem leve i desne strane jednačine istim brojem ili dodavanjem istog broja levoj i desnoj strani.

**Rešenje jednačine** je pojedinačna vrednost promenljive za koju važi posmatrana jednačina. Rešenje jednačine $a \cdot x = b$ ima vrednost $x = b/a$.

b) **Sistem od dve linearne jednačine** sa nepoznatima $x$ i $y$ su dve linearne jednačine koje važe istovremeno. Opšti oblik ovakvog sistema i njegova rešenja $x$ i $y$ data su dole.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad a \neq 0,\ b \neq 0,\ d \neq 0 \text{ i } e \neq 0$$

(sistem jednačina)

$$x = \frac{ec - bf}{ae - db}$$

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

(rešenja sistema jednačina)

## 11. Kvadratna jednačina

a) Opšti oblik kvadratne jednačine po promenljivoj $x$ i njena dva rešenja dati su dole.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

(kvadratna jednačina)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(rešenja jednačine)

Ako je $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, $x_1 \neq x_2$.

Ako je $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, $x_1 = x_2$.

Ako je $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, $x_1$ i $x_2$ su konjugovano kompleksni.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

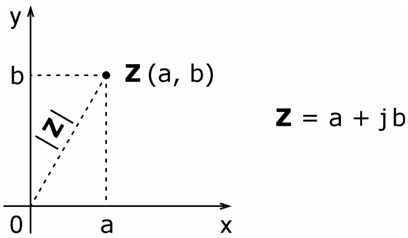
(Vietove formule)

## 12. Kompleksni brojevi

a) **Kompleksan broj Z** ima algebarski oblik $a + j \cdot b = a + jb$. Član j se naziva imaginarna jedinica i $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$. Član a se naziva **realni deo** kompleksnog broja i označava se Re **Z**. Član b je **imaginarni deo** i označava se sa Im **Z**. Članovi a i b su realani brojevi. Kompleksan broj se smatra binomom po j pa se operacije vrše prema pravilima algebre realnih brojeva.

Dva kompleksna broja, $a + jb$ i $c + jd$, su jednaki samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Kompleksnom broju $\mathbf{Z} = a + jb$ je **konjugovano kompleksan broj** $\bar{\mathbf{Z}} = a - jb$.




Svaki kompleksan broj se može predstaviti tačkom u xy ravni koja se naziva **slika kompleksnog broja**, videti prikaz levo. **Moduo** (ili **apsolutna vrednost**) kompleksnog broja $\mathbf{Z} = a + jb$ je broj $|\mathbf{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, koji odgovara rastojanju slike broja od koordinatnog početka. Kompleksan broj se može tumačiti i kao vektor $\overrightarrow{0Z}$ intenziteta jednakog modulu.

b) $(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$ (sabiranje)

c) $(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$ (oduzimanje)

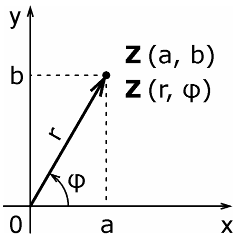
d) $(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$ (množenje)

e) $\dfrac{a + jb}{c + jd} = \dfrac{a + jb}{c + jd} \cdot \dfrac{c - jd}{c - jd} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\dfrac{bc - ad}{c^2 - d^2}$ (deljenje)

f) $\overline{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)} = \bar{\mathbf{Z}}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_2$

g) $\overline{(\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2)} = \bar{\mathbf{Z}}_1 \cdot \bar{\mathbf{Z}}_2$

h)




Svaki kompleksan broj se takođe može predstaviti tačkom sa polarnim koordintama, videti sliku levo. Veza između xy i polarnih koordinata je data sa $a = r\cos\varphi$ i $b = r\sin\varphi$, pa je $\mathbf{Z} = a + j\,b = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$. Koordinata r jednaka je modulu kompleksnog broja tj. $r = |\mathbf{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Koordinata φ se naziva **argument kompleksnog broja** i $\varphi = \arctan(b/a)$.

i) $[r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)] = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

j) $\dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

k) $[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^p = r^p[\cos(p\varphi) + j\sin(p\varphi)]$ (Moavrova formula)

l) Ojlerova formula $e^{j\varphi} = (\cos\varphi + j\sin\varphi)$ daje **eksponencijalni oblik** kompleksnog broja $\mathbf{Z} = a + jb = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r e^{j\varphi}$.

m) $(r_1 e^{j\varphi_1})(r_2 e^{j\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

n) $\dfrac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

o) $|\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2| = |\mathbf{Z}_1|\,|\mathbf{Z}_2|$

p) $\left|\dfrac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right| = \dfrac{|\mathbf{Z}_1|}{|\mathbf{Z}_2|}$

Goran Kostić 020902, 080609